'00 千葉大学

解説

(1) $S_2=a_2+\dfrac{1}{2}$ から $a_2=\dfrac{2\left(a_2+\dfrac{1}{2}\right)^2}{2\left(a_2+\dfrac{1}{2}\right)-1}$

これを解いて $a_2=-\dfrac{1}{4}$

(2) $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ と (B) から $(S_n-S_{n-1})(2S_n-1)=2S_n{}^2$

よって $-S_n-2S_nS_{n-1}+S_{n-1}=0$

ゆえに $S_n=\dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$ …… ①

(3) $S_1=\dfrac{1}{2}\fallingdotseq 0$ であるから，① により，すべての n について $S_n\fallingdotseq 0$

ゆえに，① の両辺の逆数をとると $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{S_{n-1}}+2$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{S_{k+1}}-\frac{1}{S_k}\right)=2+2(n-1)=2n$$

ここで，$n=1$ とすると $\dfrac{1}{S_1}=2=\dfrac{1}{a_1}$ となり，成り立つ．

ゆえに $S_n=\dfrac{1}{2n}$

(4) $a_n=\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{1}{2n}\right)^2}{2\cdot\dfrac{1}{2n}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{2n^2}}{\dfrac{1}{n}-1}=\dfrac{1}{2n(1-n)}$ $(n\geqq 2)$

講評

数列の漸化式の問題．和を利用して解く問題だが，難易度は基礎的．(2)の変形が若干鼻につくが，このくらいは押えておきたいところ．漸化式自体は，分数型の基本的な問題なので，落とせない．是非とも完答しておきたい．