

## '01 防衛大学校

### 解説

- (1)  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$  の値の最大に関しては、分母の  $p, q, r$  の値ができるだけ小さくなる

ときを考える。

$$p \neq 2 \text{ であるから } 3 \leq p < q < r \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$p=3$  のとき  $\textcircled{1}$  を満たす最小の  $q$  の値は  $q=4$

$$\text{ゆえに } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{r} = \frac{7}{12} + \frac{1}{r}$$

$$\text{よって, } \frac{7}{12} + \frac{1}{r} < 1 \text{ から } r > \frac{12}{5}$$

この範囲で  $\textcircled{1}$  を満たす最小の  $r$  の値は  $r=5$

$$\text{よって, } (p, q, r) = (3, 4, 5) \text{ のとき最大値 } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$$

- (2)  $q \neq 3$  であるから  $p=2, q=4$  のときを考える。

このとき  $r \geq 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{r} = \frac{3}{4} + \frac{1}{r}$$

$$\text{よって, } \frac{3}{4} + \frac{1}{r} < 1 \text{ から } r > 4$$

ゆえに  $r=5$  これは  $\textcircled{2}$  を満たす。

$$\text{よって, } (p, q, r) = (2, 4, 5) \text{ のとき最大値 } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

- (3)  $p=2, q=3$  のときを考える。

このとき  $r \geq 4 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{r} < 1 \text{ から } r > 6$$

この範囲で  $\textcircled{3}$  を満たす最小の  $r$  の値は  $7$

$$\text{よって } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$$

$$\text{また } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{23}{24}$$

$$\text{これと (2) から } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

よって,  $(p, q, r) = (2, 3, 7)$  のとき最大,

$(p, q, r) = (2, 3, 8)$  のとき 2 番目に大きい。

### 講評

整数の最大値の問題。非常に典型的な問題であるが、解き方をきちんと理解しておかないと、手が出ないだろう。整数問題の中では特によく出る問題。きちんとできるようにしておきたい。