# '01 北海道大学

## 解説

$\cos 2x+cx^2 \geqq 1$ は $cx^2 \geqq 1-\cos 2x$ …… ①

[1] $x=0$ のとき　① は任意の $c$ に対して常に成り立つ.

[2] $x \fallingdotseq 0$ のとき　$x^2>0$ であるから, ① は

$$c \geqq \frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdots\cdots ②$$ と同値である.

ここで, 偶関数 $\dfrac{\sin x}{x}$ の $x>0$ のときの値域を求めるために

$f(x)=x-\sin x$, $g(x)=x+\sin x$ とおくと

$$f'(x)=1-\cos x \geqq 0,\ f(0)=0$$
$$g'(x)=1+\cos x \geqq 0,\ g(0)=0$$

ゆえに, $x>0$ のとき　$f(x)>0$, $g(x)>0$ から

$-x<\sin x<x$ となり　$-1<\dfrac{\sin x}{x}<1$

よって　$0 \leqq 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2<2$ …… ③

したがって, ②, ③ から, ② がすべての実数 $x$ について成り立つ $c$ の値の範囲は

$$c \geqq 2$$

[1], [2] から, 求める $c$ の値の範囲は, $c \geqq 2$ である.

## 講評

不等式の証明の基本的な問題. 定数分離をして微分して計算をしていく問題. ただし, $\dfrac{\sin x}{x}$ は $\sin x$ が周期関数のために, グラフを書くのが面倒なので, 値域を求めて計算をした.