’01　関西学院大学

解説

(1)　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ を代入する．

$$f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ から }\quad f(1)=\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

(2)　x に $\dfrac{x}{2}$，y に $\dfrac{x}{2}$ を代入する．

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right) \text{ から }\quad f(x)=\left\{f\left(\frac{x}{2}\right)\right\}^2$$

よって，すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ である．

また　$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{f(x)}$

(3)

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}-f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$=\frac{f(x)+f(y)}{2}-f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{y}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}-\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)}$$
$$=\frac{1}{2}\{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}\}^2\geqq 0$$

よって　$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqq\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

(4)　ある実数 a に対して $f(a)=0$ とすると

$f(a+(-a))=f(a)f(-a)=0\cdot f(-a)=0$

よって　$f(0)=0$

すなわち 「ある実数 a に対して $f(a)=0$ ならば $f(0)=0$」が成り立つ．

対偶をとると 「$f(0)\fallingdotseq 0$ ならばすべての実数 x で $f(x)\fallingdotseq 0$」

(2) から　$f(x)\geqq 0$　　よって　$f(x)>0$

講評

関数の証明問題．関西の私大ではよく出題されるタイプの問題．難易度的には標準的だが，この手のタイプの問題を，きちんと演習していないと，解くのは難しい．是非とも演習をきちんとこなしておきたい問題．