

'01 慶応義塾大学

解説

(1) $j=11t+s$, ($0 \leq s \leq 10$, $0 \leq t \leq 10$) とおくと, $F\left(\frac{j}{11}\right)=t$, $G(j)=s$ である.

よって, $j=100=11 \times 9+1$ のとき $F\left(\frac{j}{11}\right)=9$

ゆえに $x=G(7+4 \times 100+9)=G(416)=G(11 \times 37+9)=9$
 $y=G(3+2 \times 100+5 \times 9)=G(248)=G(11 \times 22+6)=6$

よって $(x, y)=(9, 6)$

(2) $(x, y)=(0, 0)$ のとき

$G(7+4(11t+s)+t)=G(7+45t+4s)=0$

$G(3+2(11t+s)+5t)=G(3+27t+2s)=0$

よって, k, l を整数として

$7+45t+4s=11k \cdots \cdots ①$, $3+27t+2s=11l \cdots \cdots ②$ と表される.

② $\times 2$ -① から $-1+9t=11(2l-k)$

ゆえに $2l-k=\frac{9t-1}{11}$

ここで, $0 \leq t \leq 10$, $2l-k$ は整数であるから $t=5$

よって, ② から $138+2s=11l$ ゆえに $l=\frac{2(s+69)}{11}$

ここで, $0 \leq s \leq 10$, l は整数であるから $s=8$

よって $j=11 \times 5+8=63$

$(x, y)=(5, 4)$ のとき

$G(7+45t+4s)=5$, $G(3+27t+2s)=4$

よって, k, l を整数として $7+45t+4s=11k+5$, $3+27t+2s=11l+4$

すなわち $2+45t+4s=11k \cdots \cdots ③$

$-1+27t+2s=11l \cdots \cdots ④$

④ $\times 2$ -③ から

$-4+9t=11(2l-k)$ ゆえに $2l-k=\frac{9t-4}{11}$

ここで, $0 \leq t \leq 10$, $2l-k$ は整数であるから $t=9$

よって, ④ から $l=22+\frac{2}{11}s$

ここで, $0 \leq s \leq 10$, l は整数であるから $s=0$

ゆえに $j=11 \times 9=99$

講評

整数問題の余りの問題. このタイプの問題は, 出題されやすいところと, そうでないところがあるので, まずは傾向を確認しておく必要がある. 問題自体は押さえておきたい内容が, きちんと入っている基本的な問題. 整数問題は, 現役生は触れる機会も少ないので, この問題を通じて, やり方をつかんでおきたい.