'01　名古屋市立大学

解説

(1)　③ から　$y=\dfrac{n+1}{n}x=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x=x+\dfrac{x}{n}$

これを ① の両辺に代入すると　$x^x\cdot x^{\frac{x}{n}}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^x\cdot x^x$

両辺を $x^x>0$ で割ると　$x^{\frac{x}{n}}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^x$

両辺を $\dfrac{n}{x}$ 乗すると

$x=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$，$y=\dfrac{n+1}{n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ …… ④

n は自然数であるから，x，y はともに有理数である．

(2)　④で $n=1$ とすると $(x,\ y)=(2,\ 4)$ で，①，② を満たす．

逆に，$(x,\ y)$ が ①，② を満たすならば，① の両辺の対数をとって

$$y\log x=x\log y \text{ から } \quad \frac{\log x}{x}=\frac{\log y}{y}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ (ただし，$x>0$) とすると

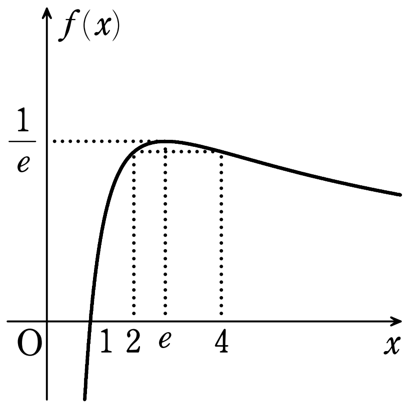
$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

ゆえに，$f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる．

よって，$f(x)=f(y)$，$0<x<y$ を満たす自然数 x は，

$1<x<e$ から　$x=2$

したがって，組 $(x,\ y)$ は $(2,\ 4)$ 以外にないことがわかる．



講評

(2)を解くときにグラフを利用したので，数学Ⅲの微分の応用問題．(1)をヒントとして考えれば，(2)も比をとって計算していくことが考えられる．

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{n+k}{n}$ (ただし，n，k は互いに素)として，計算をさせようという意図が問題から感じられるが，上記のような解答の方が，簡単に示せる．数学Ⅲの微分の威力を発揮できる問題である．是非とも習得しておきたい．