'01　大分医科大学

解説

(1)　$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\int_0^1 x^{n+1}(e^x)'dx$

$$=\Big[x^{n+1}e^x\Big]_0^1-\int_0^1 (n+1)x^n e^x dx$$

ゆえに　$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ …… ①

(2)　区間 $(0,\ 1)$ で，$x^{n+1}e^x>0$ であるから　$I_{n+1}>0$

ゆえに，① より　$e-(n+1)I_n>0$

よって　$I_n<\dfrac{e}{n+1}$ …… ②

② より　$I_{n+1}<\dfrac{e}{n+2}$

① を代入して　$e-(n+1)I_n<\dfrac{e}{n+2}$

よって　$\dfrac{e}{n+2}<I_n$

したがって　$\dfrac{e}{n+2}<I_n<\dfrac{e}{n+1}$ …… ③

(3)　③ より　$\dfrac{e}{n+3}<I_{n+1}<\dfrac{e}{n+2}$ …… ④

③＋④ から

$$\frac{e}{n+3}+\frac{e}{n+2}<I_{n+1}+I_n<\frac{e}{n+2}+\frac{e}{n+1}$$

① より　$I_{n+1}+I_n=e-nI_n$ を代入して $-n$ を各辺に掛けると

$$-\left(\frac{n}{n+3}+\frac{n}{n+2}\right)e>n(nI_n-e)>-\left(\frac{n}{n+2}+\frac{n}{n+1}\right)e \text{ …… ⑤}$$

$n\longrightarrow\infty$ のとき　$\dfrac{n}{n+3}$，$\dfrac{n}{n+2}$，$\dfrac{n}{n+1}$ はすべて 1 に収束するから ⑤ 式の左辺と右辺は $-2e$ に収束する．

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n(nI_n-e)=-2e$

講評

積分と極限の融合問題．難易度としては簡単な方に入る．被積分関数も基本的な形になっていて，部分積分に持ち込むことが，容易に考えられる．誘導もきれいな形になっているので，きちんと完答しておきたい問題