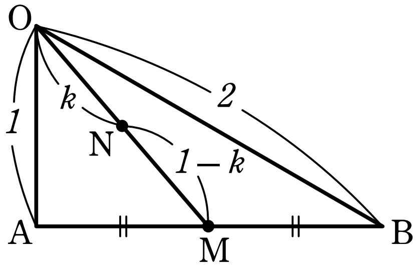
’01　龍谷大学

解説



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$，

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{k}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ から

$\overrightarrow{\mathrm{NA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{a}-\dfrac{k}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(1-\dfrac{k}{2}\right)\vec{a}-\dfrac{k}{2}\vec{b}$

(2)　$\mathrm{ON}\perp\mathrm{NA}$ より $\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NA}}=0$ となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NA}}=\frac{k}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left\{\left(1-\frac{k}{2}\right)\vec{a}-\frac{k}{2}\vec{b}\right\}$$

$$=\frac{k}{2}\left\{\left(1-\frac{k}{2}\right)\left|\vec{a}\right|^2+(1-k)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-\frac{k}{2}\left|\vec{b}\right|^2\right\}$$

ここで　$\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ=2\left|\vec{a}\right|^2\cdot\dfrac{1}{2}=\left|\vec{a}\right|^2$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NA}}=\frac{k}{2}\left\{\left(1-\frac{k}{2}\right)\left|\vec{a}\right|^2+(1-k)\left|\vec{a}\right|^2-2k\left|\vec{a}\right|^2\right\}=\frac{k}{2}\left(2-\frac{7}{2}k\right)\left|\vec{a}\right|^2$$

よって　$\dfrac{k}{2}\left(2-\dfrac{7}{2}k\right)\left|\vec{a}\right|^2=0$

ここで，$0<k<1$，$\left|\vec{a}\right|\neq 0$ から　$k=\dfrac{4}{7}$

講評

平面ベクトルの問題としては，基本的な問題．始点を決めて2つのベクトルを用いて表すという，ベクトルの原則に忠実に従っていけばよい．ベクトルの問題で，角度が出てきたらベクトルでは内積を利用というのも原則的な解法，この問題は落とせない．