’01　芝浦工業大学

解説

$A(A-pE)=q(A-pE)$ …… ① から

$$\begin{aligned}A^n(A-pE)&=A^{n-1}A(A-pE)\\&=qA^{n-1}(A-pE)\\&=\cdots\cdots=q^{n-1}A(A-pE)\\&=q^n(A-pE)\end{aligned}$$

よって，$A^n(A-pE)=q^n(A-pE)$ が成り立つ．

また，① から　$A^2-pA=qA-pqE$

ゆえに　$A^2=(p+q)A-pqE$ …… ②

O を 2 次の零行列とすると，A について，ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2-6A+8E=O$$

よって　$A^2=6A-8E$ …… ③

②，③ から　$(p+q)A-pqE=6A-8E$

ゆえに　$(p+q-6)A=(pq-8)E$ …… ④

ここで，$A=kE$ (k は実数) とすると

$b=c=0$，$a=d$

$ad-bc=8$ であるから　$a^2=8$

よって　$a=d=\pm 2\sqrt{2}$

これは　$a+d=6$ と矛盾する．

したがって　$A \fallingdotseq kE$ …… ⑤

④，⑤ から　$p+q-6=0$，$pq-8=0$

ゆえに　$(p,\ q)=(2,\ 4),\ (4,\ 2)$

よって，$A^n(A-pE)=q^n(A-pE)$ から

$A^n(A-2E)=4^n(A-2E)$ …… ⑥

$A^n(A-4E)=2^n(A-4E)$ …… ⑦

⑥－⑦ から

$$\begin{aligned}2A^n&=(4^n-2^n)A+(4\cdot 2^n-2\cdot 4^n)E\\&=2^n(2^n-1)A+2^{n+2}(1-2^{n-1})E\end{aligned}$$

ゆえに　$A^n=2^{n-1}(2^n-1)A+2^{n+1}(1-2^{n-1})E$

講評

行列の n 乗の問題．ケーリー・ハミルトンの定理を利用して問題を解くオーソドックスな形の問題．誘導も丁寧なので，確実に取れるようにしておきたい問題．