’01　滋賀医科大学

解説

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ が C_+ 上の整数点ならば，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ は明らかに整数点で

$$u^2-2v^2=(-x+2y)^2-2(x-y)^2$$
$$=-x^2+2y^2=-1$$

$(2y)^2-x^2=4y^2-x^2=2y^2-1\geqq 1$ から

$$u=-x+2y>0$$

$x^2-y^2=1+2y^2-y^2=1+y^2\geqq 2$ から

$$v=x-y>0$$

ゆえに，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ は C_- 上の整数点である．

逆に，$\mathrm{P}(x,\ y)$ が C_- 上の整数点ならば，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ は明らかに整数点で

$x^2-2y^2=-1$，$x\geqq 2$，$y\geqq 2$ から

$u^2-2v^2=(-x+2y)^2-2(x-y)^2=-x^2+2y^2=1$

$(2y)^2-x^2=4y^2-x^2=2y^2+1\geqq 9$ から

$$u=-x+2y>0$$

$x^2-y^2=y^2-1\geqq 3$ から　$v=x-y>0$

よって，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ は，C_+ 上の整数点である．

(2)　$y-v=y-(x-y)=2y-x=u>0$ から

$$0<v<y$$

(3)　$(\sqrt{2}+1)^n=x_n+y_n\sqrt{2}$ から

$$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^{n+1}$$
$$=(x_n+y_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$$
$$=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2}$$

x_n，y_n は整数であるから　$x_{n+1}=x_n+2y_n$，$y_{n+1}=x_n+y_n$

このとき

$$x_{n+1}-y_{n+1}\sqrt{2}=(x_n+2y_n)-(x_n+y_n)\sqrt{2}$$
$$=(1-\sqrt{2})x_n-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})y_n$$
$$=(1-\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})\text{ から}$$

$$x_n-y_n\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^n$$

ゆえに　$x_n{}^2-2y_n{}^2=(x_n+y_n\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})$

$$=(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n$$
$$=(-1)^n$$

よって，$\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ は，C_+ または C_- 上にある．

’01　滋賀医科大学

(4)　$\mathrm{P}(s_n,\ t_n)$ に対して，$\mathrm{Q}(s_{n+1},\ t_{n+1})$ を

$$\begin{cases} s_{n+1}=-s_n+2t_n \\ t_{n+1}=s_n-t_n \end{cases}$$ で定める．

(1)から，P が C_+ または C_- 上の整数点ならば，Q も C_- または C_+ 上の整数点である．また，(2)より，$0<t_{n+1}<t_n$ であることから，ある整数 N が存在して，$s_N=1$，$t_N=1$ となる．

逆に，$\mathrm{Q}(a_n,\ b_n)$ に対して $\mathrm{P}(a_{n+1},\ b_{n+1})$ を定めるために

$a_1=b_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2b_n$，$b_{n+1}=a_n+b_n$

と定めると

$$\begin{aligned} a_{n+1}+\sqrt{2}\,b_{n+1} &= (a_n+2b_n)+\sqrt{2}(a_n+b_n) \\ &= (1+\sqrt{2})a_n+(1+\sqrt{2})\sqrt{2}\,b_n \\ &= (1+\sqrt{2})(a_n+\sqrt{2}\,b_n) \end{aligned}$$

ゆえに　$$\begin{aligned} a_n+\sqrt{2}\,b_n &= (1+\sqrt{2})^{n-1}(a_1+\sqrt{2}\,b_1) \\ &= (1+\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

よって，C_+ または C_- 上の整数点は $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ に限る．

(5)　$x_n-y_n\sqrt{2}=(1-\sqrt{2})^n$ から

$$(x_{n+1}-y_{n+1}\sqrt{2})-(x_n-y_n\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^n$$

ゆえに

$$(x_{n+1}-x_n)-(y_{n+1}-y_n)\sqrt{2}=-\sqrt{2}(1-\sqrt{2})^n$$

よって　$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(1-\sqrt{2})^n}{x_{n+1}-x_n}$$

x_{n+1}，x_n は異なる整数であるから　$$\left|\frac{(1-\sqrt{2})^n}{x_{n+1}-x_n}\right| \leqq (\sqrt{2}-1)^n$$

したがって　$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

講評

級数の標準問題．整数点（いわゆる格子点）という形自体は，見かける機会の多い問題であるが，苦手な受験生は多い．是非ともこの問題を通じて，解法になれておきたい．理系の難度の高いところでは頻出の形式．きちんと押さえておきたい．