’01　早稲田大学

解説

(1)　$x^2+y^2=1$，$y=tx$ から　$(1+t^2)x^2=1$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$　　よって　$y=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

(2)　$\mathrm{OA}=1$，$\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=s$ であるから

$t>0$ のとき　$\angle\mathrm{AOQ}=s$ から　$t=\tan s$

t で微分して　$1=\dfrac{1}{\cos^2 s}\dfrac{ds}{dt}$

よって　$\dfrac{ds}{dt}=\cos^2 s=\dfrac{1}{1+t^2}$

$t<0$ のとき

$\angle\mathrm{AOQ}=-s$ であるから　$t=\tan(-s)=-\tan s$

t で微分して　$1=-\dfrac{1}{\cos^2 s}\dfrac{ds}{dt}$

よって　$\dfrac{ds}{dt}=-\cos^2 s=-\dfrac{1}{1+t^2}$

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{\tan h}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{\cos h}=1$

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{-\tan h}{h}=\lim_{k\to+0}\frac{\tan k}{-k}=-1$

$f'(0)$ が存在するならば　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\tan h}{h}=\frac{1}{f'(0)}$　または　$\pm\infty$ でなければならない．

ところが，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\tan h}{h}$ はこのいずれでもない．

よって $f'(0)$ は存在しないから，$t=0$ のとき微分不可能．

(3)　$\displaystyle f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}f'(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+t^2}dt$

ここで　$t=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ とおくと　$dt=\dfrac{1}{\sqrt{3}}dx$ で

$$=\int_0^1\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{3+x^2}dx$$

'01　早稲田大学

$$a_n=\sqrt{3}\,n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

同様にして　$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$g(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3+x^2}$ とおくと　$g'(x)=-\dfrac{2\sqrt{3}\,x}{(3+x^2)^2}$

$0<x<1$ のとき　$g'(x)<0$ から，$y=g(x)$ は　$0\leqq x\leqq 1$ で単調減少.

$$g''(x)=-2\sqrt{3}\cdot\frac{(3+x^2)^2-x\cdot 4x(3+x^2)}{(3+x^2)^4}$$

$$=-2\sqrt{3}\cdot\frac{3(1-x^2)}{(3+x^2)^3}=\frac{6\sqrt{3}\,(x^2-1)}{(3+x^2)^3}$$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$g''(x)\leqq 0$

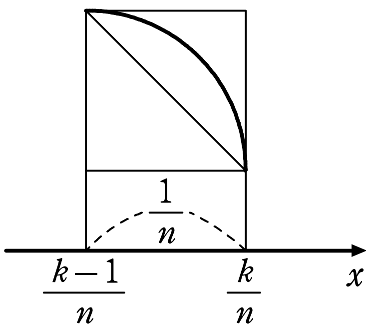
よって，$y=g(x)$ は上に凸.

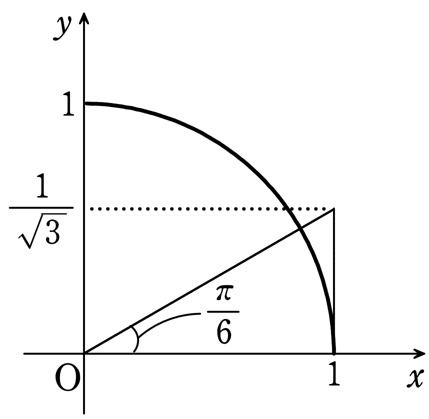
よって　$\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{1}{2n}\left\{g\left(\dfrac{k-1}{n}\right)+g\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}<\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}g(x)\,dx<\dfrac{1}{n}g\left(\dfrac{k-1}{n}\right)$

この式で $k=1$，2，……，n のときを加えると

$$a_n<\frac{a_n+b_n}{2}<\int_0^1 g(x)\,dx<b_n$$

ゆえに　$a_n<\dfrac{a_n+b_n}{2}<f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)<b_n$





’01　早稲田大学

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$$=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{3+x^2}dx=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

よって　(3) から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+b_n}{2}=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$

講評

関数の極限の問題．途中には区分求積を示唆させる部分もある．誘導もきちんとついているので上手に乗れればすんなり解けるが，若干変形が鼻につく部分もある．数学Ⅲの総まとめ的な問題として利用したい．