

'01 早稲田大学

座標平面上で、原点 O と点 $P(1, t)$ を結ぶ線分 OP が、原点 O を中心とする半径 1 の円と交わる点を $Q(x, y)$ とする.

(1) x, y を t の関数で表せ.

(2) この円の 2 点 $A(1, 0), Q(x, y)$ 間の弧 AQ の長さを $s=f(t)$ とするとき、 $\frac{ds}{dt}$ を

求めよ.

(3) n を自然数とし、

$$a_n = \sqrt{3} n \left(\frac{1}{3n^2+1^2} + \frac{1}{3n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{3n^2+n^2} \right)$$

$$b_n = \sqrt{3} n \left(\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{3n^2+1^2} + \cdots + \frac{1}{3n^2+(n-1)^2} \right)$$

とおく. このとき

$$a_n, b_n, \frac{a_n+b_n}{2}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

の大小関係を調べ、小さい順に並べよ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+b_n}{2}$ の値を求めよ.