'01　山口大学

解説

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}$，

$A^4=\begin{pmatrix} a^4 & b(a^3+a^2d+ad^2+d^3) \\ 0 & d^4 \end{pmatrix}$ から

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & b\sum_{j=0}^{n-1} a^j d^{n-j-1} \\ 0 & d^n \end{pmatrix} \cdots\cdots ①$$

と類推される．

[1]　$n=1$ のとき，

$A^1=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^1 & b\sum_{j=0}^{0} a^j d^{1-j-1} \\ 0 & d^1 \end{pmatrix}$ から ① は成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$$A^k=\begin{pmatrix} a^k & b\sum_{j=0}^{k-1} a^j d^{k-j-1} \\ 0 & d^k \end{pmatrix}$$

このとき

$$A^{k+1}=AA^k$$
$$=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & b\sum_{j=0}^{k-1} a^j d^{k-j-1} \\ 0 & d^k \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^{k+1} & ab\sum_{j=0}^{k-1} a^j d^{k-j-1}+bd^k \\ 0 & d^{k+1} \end{pmatrix}$$

ここで，$aba^jd^{k-j-1}=ba^{j+1}d^{(k+1)-(j+1)-1}$ から

$$ab\sum_{j=0}^{k-1} a^j d^{k-j-1}+bd^k$$
$$=b\sum_{j=0}^{k-1} a^{j+1} d^{(k+1)-(j+1)-1}+bd^k$$
$$=b\sum_{j=1}^{k} a^j d^{(k+1)-j-1}+bd^k$$
$$=b\sum_{j=0}^{k} a^j d^{(k+1)-j-1}$$

よって，$n=k+1$ のときも ① は成り立つ．

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対して ① は成り立つ．

ゆえに　$a_n=a^n$，$b_n=b\sum_{j=0}^{n-1} a^j d^{n-j-1}$，$c_n=0$，$d_n=d^n$

’01　山口大学

(2)　奇数 n は $n=2m-1$ (m は自然数) と表される．

よって，$A^n=E$ ならば　$A^{2m-1}=E$

ゆえに，(1) から

$$a^{2m-1}=1,\ b\sum_{j=0}^{2m-2}a^jd^{2m-j-2}=0,\ d^{2m-1}=1$$

第 1 式，第 3 式から　$a=d=1$

このとき，第 2 式から　$b(2m-1)=0$

よって　$b=0$　　したがって　$A=E$

(3)　偶数 n は $n=2m$ (m は自然数) と表される．

ゆえに，$A^n=E$ ならば　$A^{2m}=E$

よって，(1) から

$$a^{2m}=1,\ b\sum_{j=0}^{2m-1}a^jd^{2m-j-1}=0,\ d^{2m}=1$$

第 1 式，第 3 式から

$$(a,\ d)=(1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

$(a,\ d)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$ のとき，第 2 式から

$\pm 2bm=0$　　ゆえに　$b=0$

このとき　$A^2=\begin{pmatrix}a^2 & b(a+d)\\ 0 & d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$(a,\ d)=(1,\ -1)$ のとき

$$\sum_{j=0}^{2m-1}a^jd^{2m-j-1}=\sum_{j=0}^{2m-1}(-1)^{j+1}=0$$

$(a,\ d)=(-1,\ 1)$ のとき

$$\sum_{j=0}^{2m-1}a^jd^{2m-j-1}=\sum_{j=0}^{2m-1}(-1)^{j}=0$$

よって，$(a,\ d)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$ のとき第 2 式は満たされる．

ゆえに，このとき

$$A^2=\begin{pmatrix}a^2 & b(a+d)\\ 0 & d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

講評

行列の n 乗の計算問題．対角化する問題が有名であるが，本問の形もよく出るタイプである．このタイプの問題は，帰納法を使って証明するのが定石なので，きちんとできるようにしておきたい．頻出の基礎問題である．