'02 北海道大学

解説

（1） ド・モアブルの定理より $\alpha=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ であるから，

$$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=\alpha+\overline{\alpha^k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

（2） 方程式 $x^n=1$ の解は $1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}$ であり，

また，$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$ であるから，

方程式 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1=0$ の解は $\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}$ である．よって，

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1$$
$$=(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})$$

が成り立つ．これに $x=1$ を代入して，

$$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$$

（3） （1）および $|\alpha|=1$ より，$k=1,2,\cdots,n-1$ に対して，

$$\begin{aligned}|1-\alpha^k|^2&=(1-\alpha^k)\overline{(1-\alpha^k)}\\&=(1-\alpha^k)(1-\overline{\alpha}^k)=1-(\alpha^k+\overline{\alpha}^k)+|\alpha|^{2k}=2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)\\&=2\cdot2\sin\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |1-\alpha^k|=2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|=2\sin\frac{k\pi}{n}$$

が成り立つから，（2）より，

$$\begin{aligned}n&=|(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})|\\&=|1-\alpha||1-\alpha^2|\cdots|1-\alpha^{n-1}|\\&=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{n}{2^{n-1}}=\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

講評

高次方程式の標準的な問題．$x^n=1$ 型の問題の典型的なタイプといってよい．この解答の式変形の流れは必ず理解しておきたい．