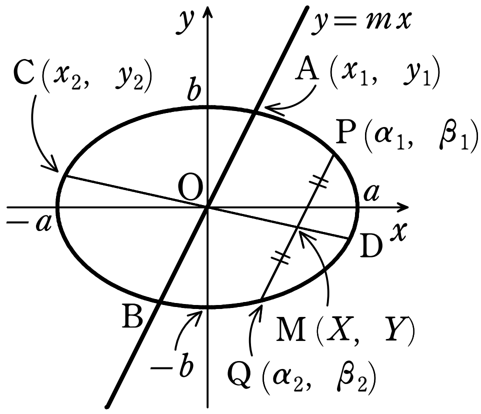
'03　旭川医科大学

解説

(1)　弦 AB に平行な任意の弦と楕円との交点を $\mathrm{P}(\alpha_1,\ \beta_1)$，$\mathrm{Q}(\alpha_2,\ \beta_2)$ とし，P，Q の中点を $\mathrm{M}(X,\ Y)$　とする．



$X=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$，$Y=\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

が成り立つ．

P, Q は楕円上にあるから

$$\frac{{\alpha_1}^2}{a^2}+\frac{{\beta_1}^2}{b^2}=1,\ \ \frac{{\alpha_2}^2}{a^2}+\frac{{\beta_2}^2}{b^2}=1$$

この式の辺々を引いて

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2)}{a^2}+\frac{(\beta_1-\beta_2)(\beta_1+\beta_2)}{b^2}=0$$

ゆえに　$\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)X}{a^2}+\dfrac{(\beta_1-\beta_2)Y}{b^2}=0$

弦 PQ の傾きは m であるから　$\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\alpha_2}=m$

よって　$\dfrac{X}{a^2}+\dfrac{mY}{b^2}=0$

したがって，M の軌跡は，直線

$$\begin{cases} m\neq 0 \text{ のとき} & y=-\dfrac{b^2}{ma^2}x \\ m=0 \text{ のとき} & x=0\ (y\text{ 軸}) \end{cases}$$

に含まれる．

(2)　(1) の結果を用いると，求める軌跡を含む直線の方程式は

$m\neq 0$ のとき　$y=-\dfrac{b^2}{\left(-\dfrac{b^2}{ma^2}\right)a^2}x$ から　$y=mx$

$m=0$ のとき　$y=0$ (x 軸)

となる．

大学入試のお部屋
Produced by Koike Masahito

'03 旭川医科大学

(3) $m \fallingdotseq 0$ のときを考える．A，C の座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とする．

$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{{y_1}^2}{b^2}=1$ および $y_1=mx_1$ から，

$\dfrac{{x_1}^2}{a^2}+\dfrac{(mx_1)^2}{b^2}=1$ すなわち $(m^2a^2+b^2){x_1}^2=a^2b^2$

ゆえに $\displaystyle {x_1}^2=\frac{a^2b^2}{m^2a^2+b^2}$，${y_1}^2=m^2{x_1}^2=\dfrac{m^2a^2b^2}{m^2a^2+b^2}$

同様に，$\dfrac{{x_2}^2}{a^2}+\dfrac{{y_2}^2}{b^2}=1$，$y_2=-\dfrac{b^2}{ma^2}x_2$ から

$$ {x_2}^2=\frac{m^2a^4}{m^2a^2+b^2},\quad {y_2}^2=\frac{b^4}{m^2a^4}{x_2}^2=\frac{b^4}{m^2a^2+b^2} $$

よって

$$
\begin{aligned}
AB^2+CD^2&=(2OA)^2+(2OC)^2=4(OA^2+OC^2)\\
&=4({x_1}^2+{y_1}^2+{x_2}^2+{y_2}^2)\\
&=4\left(\frac{a^2b^2+m^2a^2b^2}{m^2a^2+b^2}+\frac{m^2a^4+b^4}{m^2a^2+b^2}\right)\\
&=\frac{4(m^2a^2+b^2)(a^2+b^2)}{m^2a^2+b^2}\\
&=4(a^2+b^2)
\end{aligned}
$$

$m=0$ のときは，明らかに $AB^2+CD^2=4(a^2+b^2)$

講評

二次曲線の問題．軌跡の問題で，難易度も基礎的．問題自体の流れも型どおりで，誘導もきちんと出来ているので，是非とも完答できるようにしておきたい．

大学入試のお部屋
Produced by Koike Masahito