

'04 群馬大学

解説

$\{a_n\}$ の公差を d とする.

$d > 0$ のとき

$$a_n > 0 \text{ とすると } a_1 + (n-1)d > 0$$

$$\text{よって } n > 1 - \frac{a_1}{d}$$

$$\text{ゆえに } n > 1 - \frac{a_1}{d} \text{ のとき } S_{n-1} < S_n < S_{n+1} < \dots$$

したがって, S_n は最大値をとらない.

$d = 0$ のとき

$$a_n = a_1 \text{ であるから } S_n = na_1$$

したがって, S_n は最大値をとらない.

S_n が最大値をとることから, 以上より $d < 0$

$n = n_0$ のとき, S_n が最大値 22 をとるとする.

$$\text{すなわち } S_{n_0} = 22$$

$n = n_0$ で S_n が最大値をとることと $d < 0$ から

$$a_1 > a_2 > \dots > a_{n_0} > 0 > a_{n_0+1} > \dots \quad \dots \textcircled{1}$$

よって

$$S_1 < S_2 < \dots < S_{n_0-1} < S_{n_0} > S_{n_0+1} > \dots \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\{a_n\} \text{ は等差数列であるから } a_{n_0} + a_{n_0+2} = 2a_{n_0+1} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ から } S_{n_0-1} - S_{n_0+2} = -(a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2}) = -3a_{n_0+1} > 0$$

$$\text{したがって } S_{n_0-1} > S_{n_0+2} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{同様に, } S_{n_0+1} - S_{n_0-2} = 3a_{n_0} > 0 \text{ であるから } S_{n_0+1} > S_{n_0-2} \quad \dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ から, S_{n_0-1}, S_{n_0+1} の一方が S_n の中で 2 番目に, もう一方が 3 番目に大きい値である.

すなわち, $[1] S_{n_0-1} = 21, S_{n_0+1} = 20, [2] S_{n_0-1} = 20, S_{n_0+1} = 21$ のいずれかである.

'04 群馬大学

[1] $S_{n_0-1}=21, S_{n_0}=22, S_{n_0+1}=20$ のとき

$$S_n = a_n + S_{n-1} \text{ であるから } a_{n_0}=1, a_{n_0+1}=-2$$

よって $d = a_{n_0+1} - a_{n_0} = -3$ (これは $d < 0$ を満たす)

このとき $a_{n_0+1} = a_1 + (n_0 + 1 - 1) \cdot (-3)$ であるから $a_1 = 3n_0 - 2 \dots\dots \textcircled{6}$

$$\text{ゆえに } S_{n_0} = \frac{n_0\{(3n_0 - 2) + 1\}}{2} = 22$$

$$\text{整理すると } (3n_0 + 11)(n_0 - 4) = 0$$

n_0 は自然数であるから $n_0 = 4$

$$\textcircled{6} \text{ から } a_1 = 10$$

$$\text{ゆえに } a_n = 10 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 13$$

[2] $S_{n_0-1}=20, S_{n_0}=22, S_{n_0+1}=21$ のとき

$$S_n = a_n + S_{n-1} \text{ であるから } a_{n_0}=2, a_{n_0+1}=-1$$

よって $d = a_{n_0+1} - a_{n_0} = -3$ (これは $d < 0$ を満たす)

このとき $a_{n_0+1} = a_1 + (n_0 + 1 - 1) \cdot (-3)$ であるから $a_1 = 3n_0 - 1$

$$\text{ゆえに } S_{n_0} = \frac{n_0\{(3n_0 - 1) + 2\}}{2} = 22$$

$$\text{整理すると } (3n_0 - 11)(n_0 + 4) = 0$$

n_0 は自然数であるから, これを満たす n_0 は存在しない.

[1], [2] から $a_n = -3n + 13$

講評

数列の和の問題. 問題文が少ないが, 場合わけをしなければならぬので, きちんと解答できるかがポイントになってくる. きちんとした解答の仕方を身につけておきたい.