’04　広島大学

解説

(1)　$\cos b\sin(a-\theta)=\cos a\sin(b-\theta)$ から　$\sin(b-\theta)\cos a-\sin(a-\theta)\cos b=0$

よって　$(\sin b\cos\theta-\cos b\sin\theta)\cos a-(\sin a\cos\theta-\cos a\sin\theta)\cos b=0$

ゆえに　$\cos\theta(\sin b\cos a-\cos b\sin a)=0$

よって　$\cos\theta\sin(b-a)=0$

(2)　a，b は 2 曲線の交点の x 座標であるから，$A\cos x=\sin(x-\theta)$　…… ① の解である．

すなわち　$A\cos a=\sin(a-\theta)$ …… ②，　$A\cos b=\sin(b-\theta)$ …… ③

A を消去すると　$\cos b\sin(a-\theta)=\cos a\sin(b-\theta)$

(1) から　$\cos\theta\sin(b-a)=0$

よって　$\cos\theta=0$　または　$\sin(b-a)=0$

[1]　$\cos\theta=0$ のとき

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

① に代入すると　$A\cos x=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

したがって　$(A+1)\cos x=0$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ で，$a<b$ であるから　$a=\dfrac{\pi}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$b-a=\pi$

[2]　$\sin(b-a)=0$ のとき

$a=0$　または　$b=2\pi$ とすると，②，③ から　$A=-\sin\theta$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから，これは $A>0$ であることに反する．

ゆえに　$0<a<b<2\pi$

したがって　$0<b-a<2\pi$

よって　$b-a=\pi$

[1]，[2] から　$b-a=\pi$

(3)　$A>0$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから，$a\leqq x\leqq b$ において　$\sin(x-\theta)\geqq A\cos x$

したがって　$S=\displaystyle\int_a^b\{\sin(x-\theta)-A\cos x\}dx=\Big[-\cos(x-\theta)-A\sin x\Big]_a^b$

$=-\cos(b-\theta)-A\sin b+\cos(a-\theta)+A\sin a$

$b=\pi+a$ であるから　$S=2\cos(a-\theta)+2A\sin a$

'04 広島大学

(4) (3) から　$S^2=\{2\cos(\alpha-\theta)+2A\sin\alpha\}^2$

$=4\{\cos^2(\alpha-\theta)+2A\cos(\alpha-\theta)\sin\alpha+A^2\sin^2\alpha\}$ …… ④

また，② から　$\sin(\alpha-\theta)-A\cos\alpha=0$

両辺を平方すると　$\sin^2(\alpha-\theta)-2A\sin(\alpha-\theta)\cos\alpha+A^2\cos^2\alpha=0$ …… ⑤

④＋⑤×4 から

$S^2=4[1+A^2+2A\{\cos(\alpha-\theta)\sin\alpha-\sin(\alpha-\theta)\cos\alpha\}]=4(1+A^2+2A\sin\theta)$

(5) $S\geqq 0$ であるから，S^2 が最大のとき，S も最大となる．S^2 が最大となるのは，(4) から $\sin\theta=1$ のときである．

すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

このとき　$S^2=4(1+A^2+2A)=\{2(1+A)\}^2$

$A>0$ であるから　$S=2(1+A)$

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $2(1+A)$ をとる．

講評

面積の最大値を求める問題．計算が面倒ではあるが，基本的な処理をきちんと，正確にこなしていくことが求められる．

三角関数の計算・場合わけなど，基本的であるが重要な問題．是非とも完答したい．