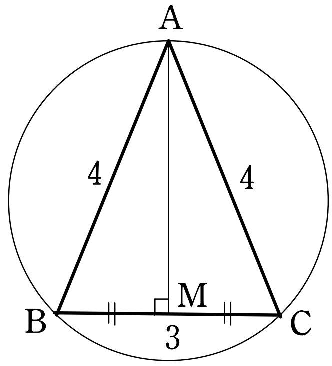
’04 広島県立大学

解説



(1) $\triangle$ABC は AB$=$AC の二等辺三角形であるから，
BC の中点を M とおくと

$$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC},\ \mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\frac{3}{2}$$

よって $\cos B=\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{4}=\dfrac{3}{8}$

(2) $\sin B>0$ であるから

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{9}{64}}=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

正弦定理により $\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R$

よって $R=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\dfrac{8}{\sqrt{55}}=\dfrac{16\sqrt{55}}{55}$

(3) $\angle\mathrm{BPA}=\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{APC}$
$\triangle$ABP において，余弦定理により

$$4^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos\angle\mathrm{APB}$$

すなわち $16=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos B$ …… ①

同様に $\triangle$APC において，余弦定理により

$$16=\mathrm{AP}^2+\mathrm{CP}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{CP}\cos B \quad\cdots\cdots ②$$

①，② から，BP，CP は $x^2-2x\mathrm{AP}\cos B+\mathrm{AP}^2-16=0$
の解である．

(4) (3) の 2 次方程式において，解と係数の関係により $\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=2\mathrm{AP}\cos B=\dfrac{3}{4}\mathrm{AP}$

AP が最大となるのは，AP が円 O の直径になるときである．

よって，BP$+$CP の最大値は $\dfrac{3}{4}\cdot 2R=\dfrac{3}{2}R=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{16\sqrt{55}}{55}=\dfrac{24\sqrt{55}}{55}$

講評

三角比の問題．典型的な問題なので，解きにくい部分は無いと思われる．特に最後の最大値の問題は置き換えをするのが定石．分からなかったらきちんと出来るようにしておきたい問題．