’04　金沢大学

解説

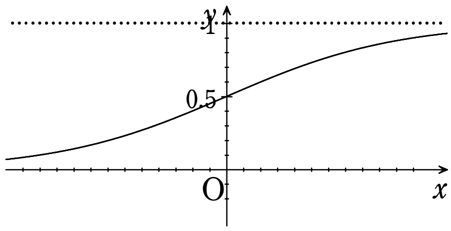
（1）　$y=(e^{-x}+1)^{-1}$ より，

$$y'=-(e^{-x}+1)^{-2}(e^{-x}+1)'$$
$$=-(e^{-x}+1)^{-2}(-e^{-x})=e^{-x}(e^{-x}+1)^{-2}$$
$$y''=-e^{-x}(e^{-x}+1)^{-2}+e^{-x}\cdot(-2)(e^{-x}+1)^{-3}(-e^{-x})$$
$$=e^{-x}(e^{-x}+1)^{-3}(e^{-x}-1)$$

$x\longrightarrow-\infty$ のとき $y\longrightarrow 0$，$x\longrightarrow\infty$ のとき $y\longrightarrow 1$ より，漸近線は $y=0$，$y=1$．

よって，増減表と概形は以下の通り．

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$	$+$	$+$	
y''		$+$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1



（2）　$\dfrac{1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^{x}}+1}=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$，$\dfrac{1}{e^{a-x}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{e^{a}}{e^{x}}+1}=\dfrac{e^{x}}{e^{a}+e^{x}}$ となる．ここで

$\displaystyle\int\left(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}-\frac{e^{x}}{e^{a}+e^{x}}\right)dx$ を考えると，$e^{x}=t$ とおくと，$e^{x}dx=dt$ となるから

与式$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{e^{a}+t}\right)dt$ となる．e^{a} は定数であるから

$$=\int\left\{\frac{(1+t)'}{1+t}-\frac{(e^{a}+t)'}{e^{a}+t}\right\}dt$$
$$=\log(1+t)-\log(e^{a}+t)+C$$
$$=\log\frac{1+t}{e^{a}+t}+C\text{（ただし，}C\text{は積分定数）}$$

となるので，問題の積分は

$$g_{a}(r)=\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx$$
$$=\left[\log\frac{1+e^{x}}{e^{a}+e^{x}}\right]_{-1}^{r}$$
$$=\log\frac{1+e^{r}}{e^{a}+e^{r}}-\log\frac{1+e^{-1}}{e^{a}+e^{-1}}$$

となる．$\log\dfrac{1+e^{r}}{e^{a}+e^{r}}=\log\dfrac{\dfrac{1}{e^{r}}+1}{\dfrac{e^{a}}{e^{r}}+1}$ と変形すれば，

$$\lim_{r\to\infty}g_{a}(r)=-\log\frac{1+e^{-1}}{e^{a}+e^{-1}}=\boldsymbol{\log\frac{e^{a}+e^{-1}}{1+e^{-1}}}$$

’04　金沢大学

（3）（2)より $h(a)=\log\dfrac{e^a+e^{-1}}{1+e^{-1}}=\log e^a\cdot\dfrac{1+e^{-a-1}}{1+e^{-1}}=a+\log\dfrac{1+e^{-a-1}}{1+e^{-1}}$.

$a\longrightarrow\infty$ のとき，$\log\dfrac{1+e^{-a-1}}{1+e^{-1}}$ は $-\log(1+e^{-1})$ に収束するので，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{1+\dfrac{\log\dfrac{1+e^{-a-1}}{1+e^{-1}}}{a}}{1}=1$$

講評

指数関数の積分・極限値の問題．積分は計算の方向性がつかめていないと計算は難しい．極限も発散の大小の感覚がきちんとつかめていないと，求める方向性がつかめないことになるかもしれない．ただ，難易度としては入試標準レベルなので，きちんととっておきたい問題．分数関数の積分・極限の大小などきちんと確認しておきたい．