

'04 東京都立大学

正の整数 n に対して, $F_n(t) = \frac{t^n - \frac{1}{t^n}}{t - \frac{1}{t}}$ とおく.

- (1) $n > 1$ に対して $F_n(t) \left(t + \frac{1}{t} \right)$ を $F_{n+1}(t)$ と $F_{n-1}(t)$ で表せ.
- (2) $x = t + \frac{1}{t}$ とおくとき, $F_n(t) = f_n(x)$ となる多項式 $f_n(x)$ が存在することを証明せよ. また, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ.
- (3) $f_n(0)$ を求めよ.
- (4) $t = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくことにより, 等式 $f_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin n \theta}{\sin \theta}$ が成立することを証明せよ.