’04　横浜国立大学

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{k}{k-1}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{x}{x+1}\vec{c}$

DQ : QP$=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{k(1-t)}{k-1}\vec{b}+\frac{xt}{x+1}\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$

Q は直線 BC 上にあるから　$\dfrac{k(1-t)}{k-1}+\dfrac{xt}{x+1}=1$

よって　$\left(\dfrac{-k}{k-1}+\dfrac{x}{x+1}\right)t=1-\dfrac{k}{k-1}$

ゆえに　$\dfrac{-k-x}{(k-1)(x+1)}t=\dfrac{-1}{k-1}$

よって　$t=\dfrac{x+1}{k+x}$　　また　$1-t=\dfrac{k-1}{k+x}$

これらを ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{k}{k+x}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{x}{k+x}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　(1) の結果により，BQ : QC$=x:k$ であるから　$\triangle\mathrm{PBQ}=\dfrac{x}{x+k}\triangle\mathrm{PBC}$

AP : PC$=x:1$ から　$\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{1}{x+1}\triangle\mathrm{ABC}$

よって　$\triangle\mathrm{PBQ}=\dfrac{x}{x+k}\cdot\dfrac{1}{x+1}\triangle\mathrm{ABC}$

すなわち　$f(x)=\dfrac{\triangle\mathrm{PBQ}}{\triangle\mathrm{ABC}}=\dfrac{x}{(x+1)(x+k)}$

(3)　$f(x)>0$ であるから，$f(x)$ が最大となるのは，$\dfrac{1}{f(x)}$ が最小のときである．

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{(x+1)(x+k)}{x}=x+\frac{k}{x}+k+1\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{k}{x}}+k+1=2\sqrt{k}+k+1$$

よって，$\dfrac{1}{f(x)}$ は $x=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$ すなわち $x=\sqrt{k}$ のとき最小となる．

したがって，$f(x)$ を最大にする x は　$x=\sqrt{k}$

講評

ベクトルの基本的な問題．最後の最大最小の問題だけが，やや技巧的だが，ⅠAⅡBの範囲では，分数関数は相加相乗の関係を利用するという原則に基づいて考えれば良い．やり方をきちんと押えておきたい．