’99 北海学園大学

解答・解説

(1) $a_{n+1}=\dfrac{2a_n-1}{a_n+4}$ より，$a_{n+1}+1=\dfrac{2a_n-1}{a_n+4}+1=\dfrac{3(a_n+1)}{a_n+4}$ となる．

ここで，ある n に対して，$a_n+1=0$ となる n を考えると，$a_n=-1$ となり，

$a_1=-1$ となるので不適．よって，$a_n+1\fallingdotseq 0$ であるから，両辺の逆数をとると

$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{a_n+4}{3(a_n+1)}=\dfrac{a_n+1+3}{3(a_n+1)}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{a_n+1}$ となるので

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$ となる．

(2) (1)より，$\{b_n\}$ は初項 $b_1=\dfrac{1}{a_1+1}=\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列になるので，

$$b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}n$$

(3) (1)・(2)より

$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{3}n$ となり，$a_n+1=\dfrac{3}{n}$ $\quad\therefore a_n=\dfrac{3-n}{n}$

講評

２項間漸化式の分数型の問題．逆数をとるだけでは解けない形になっているが，そのタイプの問題は基本的には誘導がついており，誘導にしたがって解いていけば解答できる．

本問も b_n が誘導になっており，それを使えば容易に解答できるように工夫されている．誘導があれば基本的な問題．必ず完答したい．