'99　東北工業大学

解答・解説

（1） $\int_0^4 f(t)\,dt=k$ とおくと，$f(x)=|x^2-4x|+k$ となる．

上式に代入すると，$\int_0^4\{|t^2-4t|+k\}\,dt=k$ となる．

ここで，$0\leqq t\leqq 4$ の範囲で $t^2-4t=t(t-4)\leqq 0$ であるから，

与式$=\int_0^4(-t^2+4t+k)\,dt=\left[-\dfrac{1}{3}t^3+2t^2+kt\right]_0^4=-\dfrac{64}{3}++32+4k$

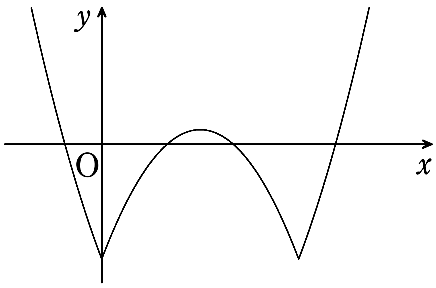
$\therefore k=-\dfrac{64}{3}+32+4k$ したがって $k=-\dfrac{32}{9}$

よって $f(x)=|x^2-4x|-\dfrac{32}{9}$

（2） （1）より

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x-\dfrac{32}{9} & (x\leqq 0\,,\,4\leqq x) \\ -x^2+4x-\dfrac{32}{9} & (0<x<4) \end{cases}$$

よって，グラフは右図のようになり



$0<1<4$ なので，

$f(x)=-x^2+4x-\dfrac{32}{9}$ より

$f(1)=-1+4-\dfrac{32}{9}=-\dfrac{5}{9}$

また，$f'(x)=-2x+4$ より，

$f'(1)=-2+4=2$ となるので，$x=1$ に対応する点における接線の方程式は

$y-\left(-\dfrac{5}{9}\right)=2(x-1)$　$\therefore y=g(x)=2x-\dfrac{23}{9}$

（3） 積分範囲が $0\leqq x\leqq 1$ より $f(x)=-x^2+4x-\dfrac{32}{9}$ であるから

与式$=\int_0^1\left(2x-\dfrac{23}{9}+x^2-4x+\dfrac{32}{9}\right)dx=\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

講評

絶対値を含む積分の問題で内容的には難しくない．絶対値の問題は場合わけをしてはずすのが基本で，特に積分の問題では積分区間を利用して場合わけをしていけばよい．絶対値が無くなれば普通に解けばよく，この問題は難易度的には教科書の問題レベルになる．