

'00 兵庫医科大学

解説

問題の図の右向きに x 軸, 上向きに y 軸をとる。B で水平にとび出した後は, x 方向には等速直線運動し, 床面で衝突をくりかえしても変わらない。一方 y 方向には初速 0, 加速度 $-g$ の等加速度運動をし, 床面と衝突したとき, 速度の y 成分は逆向きで e 倍になる。

- (1) 運動エネルギーの式 $\frac{1}{2}mv^2$ と重力による位置エネルギーの式 mgh を用いて, AB 間で力学的エネルギー保存の式をたてる。B を高さの基準, 求める速さを v_B とすると

$$mg \cdot \frac{h}{4} = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \text{よって} \quad v_B = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

- (2) 鉛直方向について見ると, 初速度 0, 加速度 $-g$, 変位 $-z$ の等加速度運動なので BC 間の所要時間 t_{BC} は, 変位の式 $y = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ より

$$-z = 0 \cdot t_{BC} + \frac{1}{2}(-g)t_{BC}^2 \quad t_{BC} = \sqrt{\frac{2z}{g}}$$

速度の式 $v = v_0 + at$ にこの t_{BC} を代入すると, 求める C 点の速度の y 成分 v_{Cy} は

$$v_{Cy} = 0 + (-g)\sqrt{\frac{2z}{g}} = -\sqrt{2gz}$$

したがって, 下向きに $\sqrt{2gz}$

- (3) 水平方向について見ると, B での速度のまま等速直線運動をするので, BC 間の水平距離 x_{BC} は

$$x_{BC} = v_B t_{BC} = \sqrt{\frac{gh}{2}} \times \sqrt{\frac{2z}{g}} = \sqrt{hz}$$

これが s を越えなければ床面 C に衝突するので

$$s \geq \sqrt{hz}$$

- (4) 求める速度成分を v_{Cy}' とすると, 反発係数の定義式 $-\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = e$ より

$$-\frac{v_{Cy}' - 0}{v_{Cy} - 0} = e$$

よって $v_{Cy}' = -ev_{Cy} = -e \cdot (-\sqrt{2gz}) = e\sqrt{2gz}$

よって, 上向きに $e\sqrt{2gz}$

'00 兵庫医科大学

- (5) まず、再び C 上に落下しない条件を求める。CD 間の運動を鉛直方向について見ると、初速度 $e\sqrt{2gz}$ 、加速度 $-g$ の等加速度運動で、再び床面 C の高さ (すなわち C からの変位 0 の点) に達する時間 t_{CC} は、(2) と同じく変位の式より

$$y = e\sqrt{2gz}t_{CC} + \frac{1}{2}(-g)t_{CC}^2 = 0$$

よって $t_{CC} = 2e\sqrt{\frac{2z}{g}}$

この点までの、B からの水平距離が s を越えれば、球 P は再び面 C に衝突することはないので

$$s < x_{BC} + v_B t_{CC} = \sqrt{hz} + \sqrt{\frac{gh}{2}} \cdot 2e\sqrt{\frac{2z}{g}} = (1+2e)\sqrt{hz} \dots\dots ①$$

次に床面 D 上に落下する条件を求める。CD 間の鉛直方向の運動について、D は C から変位 $-h$ の点なので、CD 間の時間 t_{CD} は前述と同様に変位の式より

$$-h = e\sqrt{2gz}t_{CD} + \frac{1}{2}(-g)t_{CD}^2$$

t_{CD} について解くと

$$t_{CD} = e\sqrt{\frac{2z}{g}} \pm \sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}}$$

$t_{CD} > 0$ より負符号は不適。BD 間の水平距離が $2s$ を越えると D 面をとび越してしまうので、

$$\begin{aligned} 2s &\geq x_{BC} + v_B t_{CD} \\ &= \sqrt{hz} + \sqrt{\frac{gh}{2}} \left\{ e\sqrt{\frac{2z}{g}} + \sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}} \right\} \\ &= \sqrt{h} \{ (1+e)\sqrt{z} + \sqrt{e^2z+h} \} \dots\dots ② \end{aligned}$$

①、② をともに満たせば題意にあうので

$$\frac{\sqrt{h}}{2} \{ (1+e)\sqrt{z} + \sqrt{e^2z+h} \} \leq s < (1+2e)\sqrt{hz}$$

- (6) 速度の水平成分は、B でとび出した後は一定に保たれ、床に摩擦がなければ衝突によっても変わらない。したがって $v_B = \sqrt{\frac{gh}{2}}$ のまま。
- (7) この運動が無限に続くためには、CD 間、DE 間、… の軌道が全く同じ形である必要がある。このことから、各面に衝突する直前の速度の鉛直成分も毎回 C 点のときと同じでなければならない。したがって (2) と同じく下向きに $\sqrt{2gz}$

'00 兵庫医科大学

- (8) D 点に衝突する直前の速度の鉛直成分を v_{Dy} とする。CD 間の鉛直方向の運動について速度の式 $v = v_0 + at$ を適用すると、

$$\begin{aligned} v_{Dy} &= v_{Cy}' + (-g)t_{CD} \\ &= e\sqrt{2gz} - g\left\{e\sqrt{\frac{2z}{g}} + \sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}}\right\} \\ &= -\sqrt{2g(e^2z+h)} \end{aligned}$$

- (7) で述べたように、これが C 点に衝突する直前の速度の鉛直成分 v_{Cy} と等しいので

$$-\sqrt{2gz} = -\sqrt{2g(e^2z+h)}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$\frac{z}{h} = \frac{1}{1-e^2} > 1 \quad (0 < e < 1) \quad \text{よって } z > h$$

- (9) CD 間の水平距離がちょうど面の幅 s と等しくなるので

$$\begin{aligned} s &= v_B t_{CD} \\ &= \sqrt{\frac{gh}{2}} \left\{e\sqrt{\frac{2z}{g}} + \sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}}\right\} \\ &= e\sqrt{hz} + \sqrt{h(e^2z+h)} \end{aligned}$$

よって (8) の比も利用して

$$\begin{aligned} \frac{s}{h} &= \frac{e\sqrt{hz}}{h} + \frac{\sqrt{h(e^2z+h)}}{h} \\ &= e\sqrt{\frac{z}{h}} + \sqrt{e^2\frac{z}{h} + 1} \\ &= e\sqrt{\frac{1}{1-e^2}} + \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2} + 1} \\ &= e\sqrt{\frac{1}{1-e^2}} + \sqrt{\frac{1}{1-e^2}} \\ &= (1+e)\sqrt{\frac{1}{1-e^2}} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} > 1 \quad (0 < e < 1) \end{aligned}$$

よって $s > h$

講評

床面への衝突問題。段差のあるところが考えにくいですが、基本的な考え方をきちんと使えるかがポイント。医学部の物理としては骨太の問題であるが、難易度としては標準的。問題文に惑わされることなく、上手に公式を活用できるかがポイント。