’00　兵庫医科大学

解説

問題の図の右向きに x 軸，上向きに y 軸をとる。B で水平にとび出した後は，x 方向には等速直線運動し，床面で衝突をくりかえしても変わらない。一方 y 方向には初速 0，加速度 $-g$ の等加速度運動をし，床面と衝突したとき，速度の y 成分は逆向きで e 倍になる。

(1)　運動エネルギーの式 $\frac{1}{2}mv^2$ と重力による位置エネルギーの式 mgh を用いて，AB 間で力学的エネルギー保存の式をたてる。B を高さの基準，求める速さを v_{B} とすると

$$mg\cdot\frac{h}{4}=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}{}^2 \qquad よって\quad v_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

(2)　鉛直方向について見ると，初速度 0，加速度 $-g$，変位 $-z$ の等加速度運動なので BC 間の所要時間 t_{BC} は，変位の式 $y=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ より

$$-z=0\cdot t_{\mathrm{BC}}+\frac{1}{2}(-g)t_{\mathrm{BC}}{}^2 \qquad t_{\mathrm{BC}}=\sqrt{\frac{2z}{g}}$$

速度の式 $v=v_0+at$ にこの t_{BC} を代入すると，求める C 点の速度の y 成分 $v_{\mathrm{C}y}$ は

$$v_{\mathrm{C}y}=0+(-g)\sqrt{\frac{2z}{g}}=-\sqrt{2gz}$$

したがって，**下向きに $\sqrt{2gz}$**

(3)　水平方向について見ると，B での速度のままで等速直線運動をするので，BC 間の水平距離 x_{BC} は

$$x_{\mathrm{BC}}=v_{\mathrm{B}}t_{\mathrm{BC}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}\times\sqrt{\frac{2z}{g}}=\sqrt{hz}$$

これが s を越えなければ床面 C に衝突するので

$$\boldsymbol{s\geqq\sqrt{hz}}$$

(4)　求める速度成分を $v_{\mathrm{C}y}'$ とすると，反発係数の定義式 $-\frac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}=e$ より

$$-\frac{v_{\mathrm{C}y}'-0}{v_{\mathrm{C}y}-0}=e$$

よって　$v_{\mathrm{C}y}'=-ev_{\mathrm{C}y}=-e\cdot(-\sqrt{2gz})=e\sqrt{2gz}$

よって，**上向きに $e\sqrt{2gz}$**

’00　兵庫医科大学

(5)　まず，再びC上に落下しない条件を求める。CD間の運動を鉛直方向について見ると，初速度 $e\sqrt{2gz}$，加速度 $-g$ の等加速度運動で，再び床面Cの高さ(すなわちCからの変位0の点)に達する時間 t_{CC} は，(2)と同じく変位の式より

$$y=e\sqrt{2gz}\,t_{\mathrm{CC}}+\frac{1}{2}(-g){t_{\mathrm{CC}}}^2=0$$

よって　$t_{\mathrm{CC}}=2e\sqrt{\dfrac{2z}{g}}$

この点までの，Bからの水平距離が s を越えれば，球Pは再び面Cに衝突することはないので

$$s<x_{\mathrm{BC}}+v_{\mathrm{B}}t_{\mathrm{CC}}=\sqrt{hz}+\sqrt{\frac{gh}{2}}\cdot 2e\sqrt{\frac{2z}{g}}=(1+2e)\sqrt{hz}\ \cdots\cdots ①$$

次に床面D上に落下する条件を求める。CD間の鉛直方向の運動について，DはCから変位 $-h$ の点なので，CD間の時間 t_{CD} は前述と同様に変位の式より

$$-h=e\sqrt{2gz}\,t_{\mathrm{CD}}+\frac{1}{2}(-g){t_{\mathrm{CD}}}^2$$

t_{CD} について解くと

$$t_{\mathrm{CD}}=e\sqrt{\frac{2z}{g}}\pm\sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}}$$

$t_{\mathrm{CD}}>0$ より負符号は不適。BD間の水平距離が $2s$ を越えるとD面をとび越してしまうので，

$$\begin{aligned}2s&\geqq x_{\mathrm{BC}}+v_{\mathrm{B}}\,t_{\mathrm{CD}}\\&=\sqrt{hz}+\sqrt{\frac{gh}{2}}\left\{e\sqrt{\frac{2z}{g}}+\sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}}\right\}\\&=\sqrt{h}\left\{(1+e)\sqrt{z}+\sqrt{e^2z+h}\right\}\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①，②をともに満たせば題意にあうので

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{h}}{2}\left\{(1+e)\sqrt{z}+\sqrt{e^2z+h}\right\}\leqq s<(1+2e)\sqrt{hz}}$$

(6)　速度の水平成分は，Bでとび出した後は一定に保たれ，床に摩擦がなければ衝突によっても変わらない。したがって　$v_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{gh}{2}}}$ のまま。

(7)　この運動が無限に続くためには，CD間，DE間，… の軌道が全く同じ形である必要がある。このことから，各面に衝突する直前の速度の鉛直成分も毎回C点のときと同じでなければならない。したがって(2)と同じく**下向きに** $\boldsymbol{\sqrt{2gz}}$

’00　兵庫医科大学

(8)　D 点に衝突する直前の速度の鉛直成分を $v_{\mathrm{D}y}$ とする。CD 間の鉛直方向の運動について速度の式 $v=v_0+at$ を適用すると,

$$v_{\mathrm{D}y}=v_{\mathrm{C}y}'+(-g)t_{\mathrm{CD}}$$
$$=e\sqrt{2gz}-g\left\{e\sqrt{\frac{2z}{g}}+\sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}}\right\}$$
$$=-\sqrt{2g(e^2z+h)}$$

(7) で述べたように，これが C 点に衝突する直前の速度の鉛直成分 $v_{\mathrm{C}y}$ と等しいので

$$-\sqrt{2gz}=-\sqrt{2g(e^2z+h)}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$\frac{z}{h}=\frac{1}{1-e^2}>1\ \ (0<e<1)\qquad \text{よって}\quad z>h$$

(9)　CD 間の水平距離がちょうど面の幅 s と等しくなるので

$$s=v_{\mathrm{B}}t_{\mathrm{CD}}$$
$$=\sqrt{\frac{gh}{2}}\left\{e\sqrt{\frac{2z}{g}}+\sqrt{\frac{2(e^2z+h)}{g}}\right\}$$
$$=e\sqrt{hz}+\sqrt{h(e^2z+h)}$$

よって (8) の比も利用して

$$\frac{s}{h}=\frac{e\sqrt{hz}}{h}+\frac{\sqrt{h(e^2z+h)}}{h}$$
$$=e\sqrt{\frac{z}{h}}+\sqrt{e^2\frac{z}{h}+1}$$
$$=e\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}+\sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}+1}$$
$$=e\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}+\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}$$
$$=(1+e)\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}>1\ \ (0<e<1)$$

よって　$s>h$

講評

床面への衝突問題．段差のあるところが考えにくいが，基本的な考え方をきちんと使えるかがポイント．医学部の物理としては骨太の問題であるが，難易度としては標準的．問題文に惑わされること無く，上手に公式を活用できるかがポイント．