

'01 北海道大学

解説

AB間の小球Qの運動は力学的エネルギーが保存されているが、小球Pとの衝突の前後では運動量が保存され、力学的エネルギーは保存されない。BF間の小球Pの運動は、水平方向にはBにおける速度のまま等速直線運動し、鉛直方向には、自由落下する。F点では反発係数が1なので衝突前後で速さが変わらない。したがって、面EFGへの入射角と反射角は等しく、力学的エネルギーも保存されている。

(ア) 小球QがA点でもっていた位置エネルギー $xmgh$ (B点を基準とする) が、B点で運動エネルギー $\frac{1}{2}xmv_0^2$ になるので(力学的エネルギー保存則)

$$xmgh = \frac{1}{2}xmv_0^2 \quad \text{よって} \quad v_0 = \sqrt{2gh} \quad [\text{m/s}]$$

(イ), (ウ) 衝突の前後について右向きを正として運動量保存の式を立てると

$$xmv_0 = xmv' + mv$$

$$\text{すなわち} \quad xv' + v = xv_0 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\text{反発係数の式} \quad -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = e \quad \text{より}$$

$$-\frac{v' - v}{v_0 - 0} = e \quad \text{よって} \quad v' - v = -ev_0 \quad \dots\dots \text{②}$$

①, ②式を連立して v と v' を求めると

$$v = \frac{(1+e)x}{x+1}v_0 \quad [\text{m/s}], \quad v' = \frac{x-e}{x+1}v_0 \quad [\text{m/s}]$$

(エ) Qが静止するので、(ウ)の v' が0となればよい。

$$v' = \frac{x-e}{x+1}v_0 = 0 \quad \text{よって} \quad x = e$$

(オ) 小球PがB~F間の移動にかかる時間を t [s] とする。鉛直方向には初速度0, 加速度 g で等加速度運動(自由落下)をするので、Bを原点とし下向きに y 軸をとると

$$y = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{より}$$

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{よって} \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

一方、水平方向には速度 v で等速直線運動をするので

$$L = vt = v\sqrt{\frac{2H}{g}} \quad [\text{m}]$$

'01 北海道大学

(カ) 小球 P が F に達するときの速度の水平方向の成分 v_x は $v_x = v$ (一定), 鉛直方向の成分 v_y は $v = v_0 + at$ の式より

$$v_y = gt = g\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH}$$

図 1 より

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gH}}{v}$$

(キ) 小球 P と斜面 EFG の間の反発係数が 1 なので, 衝突の前後で速度の斜面と直交する成分の大きさは変わらない。また, 斜面と平行な成分は斜面に摩擦がなければ変化しない。したがって, 斜面との衝突で速さは変わらず, 斜面への入射角と反射角は等しくなる。

この角を ϕ とおくと, 斜面と, F から斜面に引いた垂線が直交することから

$$\beta + \alpha + \phi = \frac{\pi}{2} \dots\dots ③$$

また, F を通る水平線と鉛直線 (反射方向) が直交することから

$$\alpha + 2\phi = \frac{\pi}{2} \dots\dots ④$$

③, ④ より

$$\alpha + 2\phi = \beta + \alpha + \phi$$

すなわち

$$\phi = \beta$$

よって ④ より

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \text{ [rad]}$$

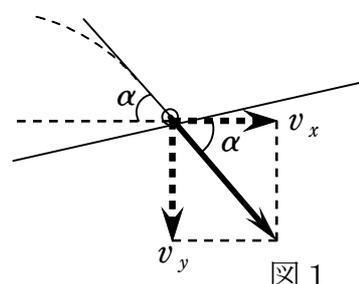


図 1

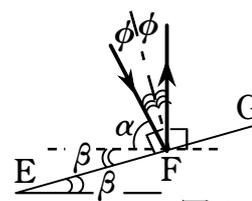


図 2

'01 北海道大学

(ク) F点での衝突で速さが変わらないので、B点を飛び出してからF点で斜面と衝突し、J点で最高点に達して一瞬静止するまでの間、力学的エネルギーが保存する。F点を高さの基準として、B点とJ点の間で力学的エネルギー保存の法則を用いると、J点の高さ H' は

$$mgH + \frac{1}{2}mv^2 = mgH'$$

よって

$$H' = H + \frac{v^2}{2g} \text{ [m]}$$

(ケ) J点以後も力学的エネルギーは保存されているので、B点からF点に入射したときとJ点からF点に落下したときで力学的エネルギーは等しい。したがって、速度は同じ大きさになる。

講評

力学の解法が全て含まれている良問。どの状態でどの関係を使うかをきちんと考えないと時間がかかりかかってしまう。問題の途中には、平面幾何的な問題も含まれているが、きちんと読めれば迷わずに進めただろう。きちんと迷わずに解き進められるようになっておきたい問題。