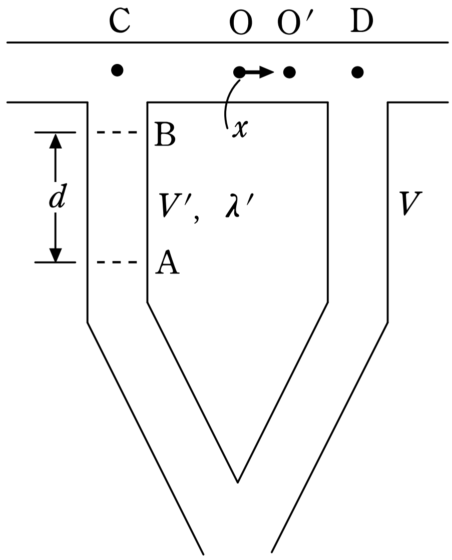
’03　東京大学

解説

(1)　点 O は S からの水路の長さが左右対称で等しいので，同じ位相の波が干渉し強めあい，定常波の腹となる。波の速さは　$V=f\lambda$



(2)　AB 間の水深が h' のときの波の速さを V'，波長を λ' とすると，波の速さは水深の平方根に比例するから，比例定数を k として

$$V=k\sqrt{h},\ V'=k\sqrt{h'}$$

よって　$\dfrac{V'}{V}=\sqrt{\dfrac{h'}{h}}$　…… ①

また，f は変化しないから

$V=f\lambda$ より　$\dfrac{V'}{V}=\dfrac{f\lambda'}{f\lambda}=\dfrac{\lambda'}{\lambda}=\sqrt{\dfrac{h'}{h}}$　…… ②

S から O までの水路の長さを L とし，O の腹が x だけ D 側にずれ O′ に来たとする (右図)。

腹が O から O′ に移ったのだから，左側と右側から O′ に達する時間が同じであれば，同位相の波が O′ で強めあう。

SABCO′ を進む時間は　$\dfrac{L-d+x}{V}+\dfrac{d}{V'}$

SDO′ を進む時間は　$\dfrac{L-x}{V}$

$$\frac{L-d+x}{V}+\frac{d}{V'}=\frac{L-x}{V}\qquad \text{ゆえに}\quad \frac{d}{V'}=\frac{d-2x}{V}$$

よって　$\dfrac{V'}{V}=\dfrac{d}{d-2x}$

これと ① を用いて　$\dfrac{V'}{V}=\dfrac{d}{d-2x}=\sqrt{\dfrac{h'}{h}}$

ゆえに　$\dfrac{h'}{h}=\left(\dfrac{d}{d-2x}\right)^2$

'03 東京大学

(3)　C→D に進む波の速さを V_1，波長を λ_1 とする。

$V_1=V+v$ から

$$\lambda_1=\frac{V_1}{f}=\frac{V+v}{f}=\frac{V}{f}+\frac{v}{f}=\lambda+\frac{V}{f}$$

D→C に進む波の速さを V_2，波長を λ_2 とする。

$V_2=V-v$ から

$$\lambda_2=\frac{V_2}{f}=\frac{V-v}{f}=\frac{V}{f}-\frac{v}{f}=\lambda-\frac{V}{f}$$

S から C，S から D の経路長は同じだから，C と D での位相は同じである。

点 O までの波の数は　D→O は　$\dfrac{\mathrm{DO}}{\lambda_2}=\dfrac{\frac{l}{2}}{\lambda_2}$

C→O は　$\dfrac{\mathrm{CO}}{\lambda_1}=\dfrac{\frac{l}{2}}{\lambda_1}$

波の数が 1 つずれると位相が 2π ずれるから，求める位相差 θ は

$$\theta=2\pi\times\left(\frac{l/2}{\lambda_2}-\frac{l/2}{\lambda_1}\right)=\pi l\left(\frac{f}{V-v}-\frac{f}{V+v}\right)=\pi l\frac{2fv}{V^2-v^2}$$

$$=\frac{2\pi flv}{(f\lambda)^2-v^2}$$

(4)　(3) で求めた位相差が π の奇数倍であれば，点 O で弱めあい節ができる。$v=0$ のときは位相差が 0 だから，v が大きくなれば位相差も大きくなる。よって，v が最小で節になるのは，位相差が π (の 1 倍) のときであるから

$$\frac{2\pi flv}{f^2\lambda^2-v^2}=\pi \qquad \text{ゆえに}\quad v^2-2flv-f^2\lambda^2=0$$

ゆえに　$v=-fl\pm\sqrt{(fl)^2+(f\lambda)^2}$

$v>0$　だから　　$v=f\left(\sqrt{l^2+\lambda^2}-l\right)$

講評

波の性質の問題．一見すると非常にややこしい感じがするが，問題文をじっくりと読めば，定常波が出来る条件の問題だと分かる．それに気付けば，あとは基本的な関係を使っていけば解ける．解き方をきちんと押えておきたい問題．