

'03 東京理科大学

解説

(a) (ア) 質量 m にはたらく重力=万有引力より

$$mg = G \frac{M \cdot m}{R^2} \quad \text{よって} \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad \dots\dots (1)$$

(イ) 高さ h の点は、地球の中心から $R+h$ だからその点の重力加速度の大きさを g' とすると

$$mg' = G \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$$

$GM = gR^2$ を用いて

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} = g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \quad \dots\dots (5)$$

(b) (ウ) 向心力=万有引力より $m \frac{v_0^2}{R} = G \frac{M \cdot m}{R^2}$

$$\text{よって} \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad \dots\dots (8)$$

(エ) 運動エネルギーは $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{GMm}{2R}$

位置エネルギーは $-G \frac{Mm}{R}$

$$\text{よって} \quad E = \frac{GMm}{2R} - G \frac{Mm}{R} = -\frac{GMm}{2R} \quad \dots\dots (17)$$

(オ) 向心力=万有引力より $m \frac{v^2}{R+h} = G \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad v &= \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM}{R} \cdot \frac{R}{R+h}} \\ &= v_0 \sqrt{\frac{R}{R+h}} \quad \dots\dots (19) \end{aligned}$$

(カ) $T = \frac{2\pi r}{v}$ より

$$T = 2\pi(R+h) \sqrt{\frac{R+h}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} \quad \dots\dots (23)$$

'03 東京理科大学

(c) (キ) ケプラーの第二法則(面積速度一定の法則)より, A点とB点の面積速度が等しいから

$$\frac{1}{2}r_A v_A = \frac{1}{2}r_B v_B$$

$$\text{よって } v_B = \frac{r_A}{r_B} v_A \quad \dots\dots (25)$$

(ク) 半長軸 $a \left(= \frac{r_A + r_B}{2} \right)$ と周期 T は比例定数を k とすると, ケプラーの第三法則より

$a^3 = kT^2$ であるから

$$T^2 = \frac{1}{k} a^3 = \frac{1}{k} \left(\frac{r_A + r_B}{2} \right)^3$$

$$\text{よって } T \propto (r_A + r_B)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots (30)$$

$$(ケ) (キ) \text{より } v_B = \frac{r_A}{r_B} v_A = \frac{1}{b} v_A \quad \dots\dots (36)$$

$$(コ) K_A = \frac{1}{2} m v_A^2, \quad U_A = -G \frac{Mm}{r_A}$$

$$K_B = \frac{1}{2} m v_B^2, \quad U_B = -G \frac{Mm}{r_B}$$

$$\text{だから } K_B = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_A^2 \cdot \frac{v_B^2}{v_A^2}$$

$$= K_A \cdot \left(\frac{1}{b} \right)^2 \quad \dots\dots (38)$$

$$(サ) \text{ また } U_B = -G \frac{Mm}{r_B} = -G \frac{Mm}{r_A} \cdot \frac{r_A}{r_B}$$

$$= \frac{1}{b} \times U_A \quad \dots\dots (36)$$

'03 東京理科大学

$$(シ) \begin{cases} E_0 = K_A + U_A & \dots\dots (i) \\ E_0 = K_B + U_B = \left(\frac{1}{b}\right)^2 K_A + \frac{1}{b} U_A & \dots\dots (ii) \end{cases}$$

$$(i)-(ii) \times b \text{ より } E_0 - bE_0 = K_A - \frac{1}{b} K_A$$

$$\text{よって } K_A = \frac{1-b}{1-\frac{1}{b}} E_0 = -b E_0 \quad \dots\dots (33)$$

$$(ス) (i)-(ii) \times b^2 \text{ より } E_0 - b^2 E_0 = U_A - bU_A$$

$$\text{よって } U_A = \frac{1-b^2}{1-b} E_0 = (1+b) E_0 \quad \dots\dots (40)$$

$$(セ) (ii) \text{ の } E_0 = \left(\frac{1}{b}\right)^2 K_A + \frac{1}{b} U_A \text{ で}$$

$$b \rightarrow \infty \text{ とすれば } E_0 \rightarrow 0 \quad \dots\dots (44)$$

(ソ) (i) の $E_0 = K_A + U_A$ で, $E_0 = 0$, $r_A = R$ とし, 求める速さを v とすれば,

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{R} = 0$$

$$\text{ゆえに } v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \dots\dots (9)$$

講評

万有引力・ケプラーの法則の問題。この分野の内容のほぼ全てが含まれた良問。難易度としては標準的。簡単ではないが、きちんと押さえておくべき問題である。