'99 京都大学

解説

(1) (ア) 衝突直前の速さを v とすると，力学的エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}mv^2=mgL \qquad \text{ゆえに} \quad v=\sqrt{2gL}$$

(イ) 小球 1 と 2 の衝突後の速度を v_1，v_2 とすると，運動量保存とはね返りの条件から $m\sqrt{2gL}=mv_1+Mv_2 \qquad \dfrac{v_1-v_2}{\sqrt{2gL}}=-1$

ゆえに $v_1=\dfrac{m-M}{m+M}\sqrt{2gL}$

上昇する高さを h とすると，力学的エネルギー保存則により

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{m+M}\sqrt{2gL}\right)^2=mgh \qquad \text{ゆえに} \quad h=\left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2L$$

(2) (ウ) v_1 の求め方と同様にして $v_2=\dfrac{2m}{m+M}\sqrt{2gL}$

(エ) 質量の等しい 2 球の完全弾性衝突では速度交換が行われる。衝突直後の小球 2 と 3 の速度をそれぞれ v_2'，v_3 とすると $v_2'=0$

(3) (オ) 運動量と力積の関係を利用する

(始めの運動量) + (力積) = (あとの運動量) より

$0+P=Mv_3$ ，$v_3=\dfrac{2mM}{m+M}\sqrt{2gL}$ となるので，

$$\therefore \quad P=\frac{2mM}{m+M}\sqrt{2gL}$$

(4) (カ) D 点における小球 3 の速さの最小値を u とすると，力学的エネルギー保存則，および鉛直方向の力のつりあいから

$$\frac{1}{2}Mv_3{}^2=\frac{1}{2}Mu^2+2Mgr \qquad \cdots\cdots \text{(a)}$$

$$Mg=\frac{Mu^2}{r} \qquad \cdots\cdots \text{(b)}$$

(a)(b) 2 式から u を消去すると $\dfrac{1}{2}Mv_3{}^2=\dfrac{1}{2}Mgr+2Mgr=\dfrac{5}{2}Mgr$

ゆえに $v_3=\sqrt{5gr}=\dfrac{2m}{m+M}\sqrt{2gL}$ 　よって $L=\dfrac{5r}{2}\left(\dfrac{m+M}{2m}\right)^2$

(キ) (b) から $u=\sqrt{gr}$

(ク) 落下時間は $\sqrt{\dfrac{4r}{g}}$ であるから $\mathrm{BC}=\sqrt{gr}\cdot\sqrt{\dfrac{4r}{g}}=2r$

講評

運動量の典型的な問題．問題も分かりやすくできているので，迷う部分は少ない問題．ただし，運動量と力積の関係に関してはあまり使う機会が少ないので，迷う部分になったかもしれない．エネルギーの関係式の使い方も基本的なので，是非とも完答したい問題．