

'99 立命館大学

解説

(1) 粒子 A の運動方向の運動量保存則により $M_1v_0 = M_1v_1\cos\theta + M_2v_2\cos\phi$

(2) 粒子 A の運動方向に垂直な方向の運動量保存則により $M_1v_1\sin\theta = M_2v_2\sin\phi$

(3) 力学的エネルギー保存則により $\frac{M_1v_0^2}{2} = \frac{M_1v_1^2}{2} + \frac{M_2v_2^2}{2}$

(4) $(M_1v_0 - M_1v_1\cos\theta)^2 = (M_2v_2)^2\cos^2\phi$ $(M_1v_1\sin\theta)^2 = (M_2v_2)^2\sin^2\phi$
 $(M_1v_0 - M_1v_1\cos\theta)^2 + (M_1v_1\sin\theta)^2 = (M_2v_2)^2$

(c) 式より $M_1M_2v_0^2 - M_1M_2v_1^2 = (M_2v_2)^2$

v_2 を消去して v_1 の 2 次式を導くと

$$(M_1 + M_2)v_1^2 - 2M_1v_0\cos\theta \cdot v_1 + (M_1 - M_2)v_0^2 = 0$$

$v_1 > 0$ であるから

$$v_1 = \frac{M_1\cos\theta + \sqrt{M_2^2 - M_1^2\sin^2\theta}}{M_1 + M_2}v_0 = \frac{R\cos\theta + \sqrt{1 - R^2\sin^2\theta}}{R + 1}v_0$$

(5) (4) と同様にして v_2 に関する 2 次式を求めると $(M_1 + M_2)v_2^2 - 2M_1v_0\cos\phi \cdot v_2 = 0$

$v_2 \neq 0$ であるから $v_2 = \frac{2M_1\cos\phi}{M_1 + M_2}v_0 = \frac{2R\cos\phi}{R + 1}v_0$

(ア) $1 - R^2\sin^2\theta > 0$, $R < 1$ であるから $\sin\theta \leq 1$ のすべての値をとりうる。

ゆえに $0 \leq \theta \leq 180^\circ$

(イ) $v_2 > 0$, $v_0 > 0$, $R > 0$ であるから $\cos\phi \leq 1$ のすべての値をとりうる。

ゆえに $0 \leq \phi \leq 90^\circ$

(ウ) $R = 2$ であるから $1 - 4\sin^2\theta > 0$ ゆえに $\sin\theta \leq \frac{1}{2}$

よって $0 \leq \theta \leq 30^\circ$

(エ) $v_2 = \frac{4\cos\phi}{3}v_0$ ゆえに $\cos\phi \geq 0$

よって $0 \leq \phi \leq 90^\circ$

(オ) $R = \infty$ であるから $v_2 = \frac{2\cos\phi}{1 + \frac{1}{R}}v_0 \doteq 2\cos\phi \cdot v_0$ ゆえに $v_{2\max} = 2v_0$

講評

物体の衝突の問題。斜め衝突の基本的な問題である。後半部分は物理の問題というよりも、数学の問題。ただ、この程度の数式の吟味は出来るようにしておきたいところ。