'99　立命館大学

解説

(1)　粒子 A の運動方向の運動量保存則により　$M_1v_0=M_1v_1\cos\theta+M_2v_2\cos\phi$

(2)　粒子 A の運動方向に垂直な方向の運動量保存則により　$M_1v_1\sin\theta=M_2v_2\sin\phi$

(3)　力学的エネルギー保存則により　$\dfrac{M_1{v_0}^2}{2}=\dfrac{M_1{v_1}^2}{2}+\dfrac{M_2{v_2}^2}{2}$

(4)　$(M_1v_0-M_1v_1\cos\theta)^2=(M_2v_2)^2\cos^2\phi$　$(M_1v_1\sin\theta)^2=(M_2v_2)^2\sin^2\phi$

$(M_1v_0-M_1v_1\cos\theta)^2+(M_1v_1\sin\theta)^2=(M_2v_2)^2$

(c) 式より　$M_1M_2{v_0}^2-M_1M_2{v_1}^2=(M_2v_2)^2$

v_2 を消去して v_1 の 2 次式を導くと

$(M_1+M_2){v_1}^2-2M_1v_0\cos\theta\cdot v_1+(M_1-M_2){v_0}^2=0$

$v_1>0$ であるから

$$v_1=\frac{M_1\cos\theta+\sqrt{{M_2}^2-{M_1}^2\sin^2\theta}}{M_1+M_2}v_0=\frac{R\cos\theta+\sqrt{1-R^2\sin^2\theta}}{R+1}v_0$$

(5)　(4) と同様にして v_2 に関する 2 次式を求めると　$(M_1+M_2){v_2}^2-2M_1v_0\cos\phi\cdot v_2=0$

$v_2\neq0$ であるから　$v_2=\dfrac{2M_1\cos\phi}{M_1+M_2}v_0=\dfrac{2R\cos\phi}{R+1}v_0$

(ア)　$1-R^2\sin^2\theta>0$，$R<1$ であるから $\sin\theta\leqq1$ のすべての値をとりうる。

ゆえに　$0\leqq\theta\leqq180°$

(イ)　$v_2>0$，$v_0>0$，$R>0$ であるから $\cos\phi\leqq1$ のすべての値をとりうる。

ゆえに　$0\leqq\phi\leqq90°$

(ウ)　$R=2$ であるから　$1-4\sin^2\theta>0$　　ゆえに　$\sin\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

よって　$0\leqq\theta\leqq30°$

(エ)　$v_2=\dfrac{4\cos\phi}{3}v_0$　　ゆえに　$\cos\phi\geqq0$

よって　$0\leqq\phi\leqq90°$

(オ)　$R=\infty$ であるから　$v_2=\dfrac{2\cos\phi}{1+\dfrac{1}{R}}v_0\fallingdotseq2\cos\phi\cdot v_0$　　ゆえに　$v_{2\max}=2v_0$

講評

物体の衝突の問題．斜め衝突の基本的な問題である．後半部分は物理の問題というよりも，数学の問題．ただ，この程度の数式の吟味は出来るようにしておきたいところ．